特異点論の問題 (複素幾何学の諸問題)

AUTHOR(S):

石井, 志保子

数理解析研究所講究録
第 1731 巻 2011 年 52-59

特異点論の問題

東京工業大学大学院理工学研究科　石井志保子 (Shihoko Ishii)
Tokyo Institute of Technology

1. 導入

特異点は代数、幾何，解析のすべての分野にまたがっており、その問題も多様であるが，ここでは代数幾何学における特異点にしぼって紹介する．多様体はすべて複素数体上定義されているとする．

多様体 X 上の特異点を調べる場合，広中による特異点解消

$$f : Y \longrightarrow X$$

を用いて，Y 上の標準因子 K_Y と X 上の "標準因子 K_X" のくい違い (discrepancy) を調べるのが代数幾何学での一般的な立場である．

ここで，Y は非特異であるので Y 上の標準因子 K_Y とは可逆層

$$\wedge^n \Omega_Y$$

に対応する因子ということで意味ははっきりしている．(ただし n は X, Y の次元)

一方 X は特異点を持つので，$\wedge^n \Omega_X$ は可逆層ではなく，一般に因子と対応していないので，"標準因子 K_X" というのは明確ではない．しかし，X に $\mathbb{Q}$-Gorenstein という条件を付加すれば "標準因子 K_X" は自然に定義され，双有理幾何学での重要な役割を果たす特異点たちが導入される．ここではこの $\mathbb{Q}$-Gorenstein の場合の discrepancy を紹介しこれらが用いられる双有理幾何学を俯瞰する．その後 $\mathbb{Q}$-Gorenstein という条件のない一般の場合に新しい discrepancy を導入する．

2. $\mathbb{Q}$-Gorenstein の場合

一般に $\mathbb{Q}$-Gorenstein と言った場合は、正規性を仮定しているので標準因子 K_X は Weil 因子としては存在している．

定義 2.1. X が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 多様体であるとは，ある正整数 r が存在し rK_X が Cartier 因子になる場合である．このような最小の r を X の指数と呼び，Ind$X$ と表す．

定義 2.2. $f : Y \longrightarrow X$ を X の特異点解消とする．$r = \mathrm{Ind}X$ に対して

$$f^*K_X = \frac{1}{r} f^*(rK_X)$$

と定義すると f^*K_X は Y 上の $\mathbb{Q}$-Cartier 因子 になる．canonical discrepancy を

$$K_{Y/X} = K_Y - f^*K_X$$

で定義する．これは例外因子上に台を持つ $\mathbb{Q}$-Cartier 因子であるので

$$\sum_i k_{E_i} E_i \quad (k_{E_i} \in \mathbb{Q})$$

とあらわされる．

２０世紀から引き継いだ重要な問題である「極小モデル問題」の各ステップはすべてこの $\mathbb{Q}$-Gorenstein の範疇で遂行される．

「極小モデルプログラム概略」

開始：$X_1 = X$ は "mild" な特異点を持つ $\mathbb{Q}$-Gorenstein 多様体．

K_{X_1} が nef ($K_{X_1} \cdot C \geq 0$, $\forall C$ 曲線) ならプログラム終了．
そうでなかったら $K_{X_1} \cdot C < 0$ なる曲線が存在．

$\Downarrow$

C に関する Mori contraction $\varphi : X_1 \longrightarrow X_1'$ を構成

$\Downarrow$

$\dim X_1' < \dim X_1$ ならばプログラム終了
$\dim X_1' = \dim X_1$ で X_1 が X と同様な条件を満たしているならば
$X_2 = X_1'$ に対してこの操作を繰り返す
$\dim X_1 = \dim X_1$ で X_1' が $\mathbb{Q}$-Gorenstein でない場合

$\Downarrow$

X_1 を少し "ましな" ものに取り替える：$X_1 - \longrightarrow X_2$ (flip)
X_2 ももちろん $\mathbb{Q}$-Gorenstein

$\Downarrow$

X_2 に対して最初の操作を行う

$\Downarrow$

この操作を繰り返す

$\Downarrow$

最終的に ある i があって，$\dim X_i < \dim X$ となるか
または K_{X_i} が nef となる．

このプログラムのステップが有限回で終了すれば，極小モデル問題が解決する．よく知られているように $\dim X = 3$ の場合は森 [11] によりこれは証明された．現在のところ 4 次元以上でも [1] により，一般型であれば K_{X_i} が nef となるモデルが取れることが証明されている．一般には 4 次元以上でも，flip が有限回で終了することさえ示せば良いということまでわかっている．

ここで、“milde” な特異点を定義しよう．

定義 2.3. X を $\mathbb{Q}$-Gorenstein 多様体，$\mathfrak{a}$ を $\mathcal{O}_X$ のイデアル，c を非負実数とする．$f : Y \longrightarrow X$ を $(X, \mathfrak{a})$ の ログ解消, $\mathfrak{a}\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-\sum b_i E_i)$ とする．

$$K_{Y/X} - c\sum_i b_i E_i = \sum_i a_i E_i$$

と表したとき，a_i を $(X, \mathfrak{a}^c)$ の E_i での discrepancy と呼び

$$a(E_i; X, \mathfrak{a}^c) := a_i + 1$$

を $(X, \mathfrak{a}^c)$ の E_i での log-discrepancy と呼ぶ．これは

$$a(E_i; X, \mathfrak{a}^c) = \operatorname{ord}_{E_i} K_{Y/X} - c \operatorname{ord}_{E_i} \mathfrak{a} + 1$$

とも表される．任意の E_i について $a(E_i; X, \mathfrak{a}^c) \geq 0$ のときペア $(X, \mathfrak{a}^c)$ は対数的標準特異点を持つという．

定義 2.4. 対数的標準閾値 (log-canonical threshold) を次で定義する．

$$\operatorname{lct}(X, \mathfrak{a}) := \sup\{c \mid (X, \mathfrak{a}^c) \text{ は対数的標準 }\}$$

$$\operatorname{lct}_x(X, \mathfrak{a}) := \sup\{c \mid (X, \mathfrak{a}^c) \text{ は } x \text{ で対数的標準 }\}.$$

次はこの対数的標準閾値をジェットスキームの言葉で言い換えた驚くべき結果である．ジェットスキームに関しては説明を省くが，基礎知識が必要な読者は [9] を参照していただきたい．

定理 2.5 ([7]). $(X, \mathfrak{a})$ を非特異な X とイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ からなるペアとする．Z を $\mathfrak{a}$ で定義される部分スキームとする．このとき対数的標準閾値は次で表される．

$$\operatorname{lct}(X, \mathfrak{a}) = \min_{m \in \mathbb{N}} \frac{\operatorname{codim}(Z_{m-1}, X_{m-1})}{m}.$$

ここで X_m, Z_m はそれぞれ X, Z の m-ジェットスキームである．

定義 2.6. $W \subset X$ を閉集合とする．$\dim X \geq 2$ の時に極小log-discrepancy を次で定義する．

$$\operatorname{mld}(W; X, \mathfrak{a}) = \inf\{a(E; X, \mathfrak{a}) \mid E : \ W \text{ に中心を持つ } X \text{ 上空の因子 }\}.$$

注意 2.7. (1) 任意の W について $\operatorname{mld}(W; X, \mathfrak{a}) \geq 0 \Longleftrightarrow (X, \mathfrak{a})$ は対数的標準.

(2) $\dim X \geq 2$ のとき W に中心を持つある因子 E について
$a(E; X, \mathfrak{a}) < 0$ とすると

$$\mathrm{mld}(W; X, \mathfrak{a}) = -\infty.$$

次は mld をジェットスキームの言葉で表した公式である．記号 Cont に関しては [9] を参照されたい．

定理 2.8 ([4]). X を $\mathbb{Q}$-*Gorenstein* で指数 r，$W \subset X$ を閉集合とすると

$$\mathrm{mld}(W; X, \mathfrak{a}) = \inf_{m,l}\{\mathrm{codim}\left(\mathrm{Cont}^m(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{Cont}^l(I_r) \cap \mathrm{Cont}^{\geq 1}(I_W)\right) - \frac{l}{r} - m\}.$$

ここで I_W は W の定義イデアル，I_r は 注意 *3.3* にあるイデアルである．codim は X の ∞-ジェットスキーム X_∞ 内での余次元を表す．

定義 2.9. $\mathbb{Q}$-Gorenstein 多様体 X とイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ と $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対してペア $(X, \mathfrak{a}^c)$ の乗数イデアルを次で定義する．

$$\mathcal{J}(X, \mathfrak{a}^c) := f_*\mathcal{O}_Y(\lceil K_{Y/X} - cF \rceil).$$

ただし $f: Y \longrightarrow X$ は $(X, \mathfrak{a})$ のログ解消， F は $\mathfrak{a}\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-F)$ なる因子である．

乗数イデアルは　標準特異点の小変形による不変性（川又）や一般型の非特異射影多様体の平坦族における多重種数の不変性（Siu)　など多くの応用がある重要な概念である．乗数イデアルに関する不変数を導入しよう．

補題 2.10. X を非特異とし $x \in X$ とすると有理数列 $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \ldots$ が存在し次が成立する：

$$\mathcal{J}(X, \mathfrak{a}^c)_x = \mathcal{J}(X, \mathfrak{a}^{\xi_i})_x, \quad \forall c \in [\xi_i, \xi_{i+1})$$
$$\mathcal{J}(X, \mathfrak{a}^{\xi_{i+1}})_x \subsetneq \mathcal{J}(X, \mathfrak{a}^{\xi_i})_x.$$

定義 2.11. この数列 $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \ldots$ を $(X, \mathfrak{a})$ の jumping numbers という．$\xi_1 = \mathrm{lct}_x(X, \mathfrak{a})$ であることに注意．

問題 2.12 (*). $\mathrm{lct}_x(X, \mathfrak{a})$ をジェットスキームの言葉で表せ．

問題 2.13 (***). *jumping numbers* をジェットスキームの言葉で表せ．

mld をジェットスキームの言葉で表した定理 2.8 のおかげで次の逆随伴定理が得られる．証明はジェットスキームの幾何を使ってなされる．

定理 2.14 ([4],[6], [10]). X を $\mathbb{Q}$-*Gorenstein* 多様体で非特異多様体 A に含まれているとする．$\mathrm{codim}(X, A) = c$ としよう．$\widetilde{\mathfrak{a}} \subset \mathcal{O}_A$ をイデアル，$\mathfrak{a} := \widetilde{\mathfrak{a}}\mathcal{O}_X \neq 0$ とする．I_X を X の定義イデアル，$J_r := (\overline{\mathcal{J}ac_X^r} : I_r)$ *(*$r = \mathrm{Ind}X$*)* とする．このとき次の等式が成立する．

$$\mathrm{mld}(W; X, \mathfrak{a}J_r^{1/r}) = \mathrm{mld}(W; A, \widetilde{\mathfrak{a}}I_X^c).$$

定理 2.15 ([4],[6], [10]). X を正規な局所完全交叉とし，H を X 上の正規な超曲面とする．$\tilde{\mathfrak{a}} \subset \mathcal{O}_X$ をイデアル，$\mathfrak{a} := \tilde{\mathfrak{a}}\mathcal{O}_H \neq 0$ とする．I_H を H の定義イデアルとする．このとき次の等式が成立する．

$$\mathrm{mld}(W; H, \mathfrak{a}) = \mathrm{mld}(W; A, \tilde{\mathfrak{a}} I_H).$$

定理2.14 の系として次が得られる．

系 2.16 ([5]). X を正規な局所完全交叉とすると

$$X \ni x \mapsto \mathrm{mld}(x; X, \mathfrak{a})$$

は下半連続である．

問題 2.17 (***). 上記の系を一般の $\mathbb{Q}$-*Gorenstein* 多様体 X に対して示せ．

注意 2.18. mld の下半連続性と昇鎖条件が示されれば flip が有限回で終了することが示される．

3. 一般の場合

ここでは X を一般の多様体とする．すなわち既約で被約な $\mathbb{C}$ 上有限型のスキームである．従って $\mathbb{Q}$-Gorenstein を仮定しないことはもちろん，正規性も要求しない．このような X 上の discrepancy を定義しよう．

3.1. X を n 次元の任意の多様体，$f : Y \longrightarrow X$ を X の Nash blow-up を経由する X の特異点解消とする．一般に自然な準同形

$$f^* \wedge^n \Omega_X \xrightarrow{df} \wedge^n \Omega_Y$$

が存在するがその像は可逆であることが，Nash blow-up を経由することから導かれる．従ってその像は

$$\mathrm{Im}(df) = \mathcal{J}(\wedge^n \Omega_Y)$$

と可逆なイデアル層 $\mathcal{J}$ を使ってあらわされる．

定義 3.2. 次の式で Mather discrepancy $\widehat{K}_{Y/X}$ を定義する．

$$\mathcal{O}_Y(-\widehat{K}_{Y/X}) = \mathcal{J}.$$

この discrepancy もある意味で "K_Y と K_X のくい違い" と云える．

注意 3.3. (1) $\widehat{K}_{Y/X}$ はどんな多様体に対しても（正規でなくても）定義できる．ただし Y は Nash blow-up を経由する特異点解消でなければならない．
(2) $\widehat{K}_{Y/X}$ は常に正の Cartier 因子である．
(3) X が非特異の場合は $K_{Y/X} = \widehat{K}_{Y/X}$.

(4) X が $\mathbb{Q}$-Gorenstein で指数が r のとき，イデアル $I_r \subset \mathcal{O}_X$ が存在して

$$\mathcal{O}_Y(rK_{Y/X}) = (f^*I_r)\mathcal{O}_Y(r\widehat{K}_{Y/X}).$$

このMather discrepancy を用いて Mather 乗数イデアル，Mather 対数的標準閾値，Mather 極小 log-discrepancy を定義すると，Mather discrepancy は ジェットスキームと相性が良いため、ジェットスキームを使った公式が簡単に得られる．

定義 3.4. 任意の多様体 X に対して，$f : Y \longrightarrow X$ を Nash blow-up を経由する $(X, \mathfrak{a})$ の log-特異点解消とする．Mather 乗数イデアルを次で定義する．

$$\widehat{\mathcal{J}}(X, \mathfrak{a}^c) := f^*\mathcal{O}_Y(\widehat{K}_{Y/X} - [cF]),$$

ただし F は $\mathcal{O}_Y(-F) = \mathfrak{a}\mathcal{O}_Y$ で定義される因子．

Mather 対数的標準閾値，Mather 極小 log-discrepancy を次で定義する．簡単のため $\dim X \geq 2$ とする．

$$\widehat{\mathrm{lct}}(X, \mathfrak{a}) = \sup_{E:X\ \text{上空の因子}} \{c \mid \hat{a}(E; X, \mathfrak{a}) = \mathrm{ord}_E \widehat{K}_{Y/X} - c\,\mathrm{ord}_E \mathfrak{a} + 1 \geq 0\},$$

$$\widehat{\mathrm{mld}}(W; X, \mathfrak{a}) = \inf\{\hat{a}(E; X, \mathfrak{a}) \mid E : W\ \text{に中心を持つ}\ X\ \text{上空の因子}\}.$$

これは lct, mld の定義で 単に $K_{Y/X}$ を $\widehat{K}_{Y/X}$ に変えたものである．

定理 3.5. $(X, \mathfrak{a})$ を任意の多様体 X とイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ からなるペアとする．すると *Mather* 対数的標準閾値は次で与えられる*:*

$$\widehat{\mathrm{lct}}(X, \mathfrak{a}) = \min_{m\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{codim}(\mathrm{Cont}^{\geq m}(\mathfrak{a}), X_\infty)}{m}.$$

この定理の系として、定理 2.5 が得られる．

定理 3.6. $(X, \mathfrak{a})$ を任意の多様体 X とイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ からなるペアとする．W を X の閉集合とし I_W を W の定義イデアルとする．すると次が得られる：

$$\widehat{\mathrm{mld}}(W; X, \mathfrak{a}) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \{\mathrm{codim}(\mathrm{Cont}^m(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{Cont}^{\geq 1}(I_W), X_\infty) - m\}.$$

この定理の系として、定理 2.8 が得られる．

補題 3.7. X を任意の多様体とし $x \in X$ とすると有理数列 $0 = \hat{\xi}_0 < \hat{\xi}_1 < \hat{\xi}_2 \ldots$ が存在し次が成立する：

$$\widehat{\mathcal{J}}(X, \mathfrak{a}^c)_x = \mathcal{J}(X, \mathfrak{a}^{\hat{\xi}_i})_x, \quad \forall c \in [\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_{i+1})$$

$$\widehat{\mathcal{J}}(X, \mathfrak{a}^{\hat{\xi}_{i+1}})_x \subsetneq \mathcal{J}(X, \mathfrak{a}^{\hat{\xi}_i})_x.$$

定義 3.8. この数列 $0 = \hat{\xi}_0 < \hat{\xi}_1 < \hat{\xi}_2 \ldots$ を $(X, \mathfrak{a})$ の Mather jumping numbers という．$\hat{\xi}_1 = \widehat{\mathrm{lct}}_x(X, \mathfrak{a})$ であることに注意．

問題 3.9 (*). $\widehat{\mathrm{lct}}_x(X,\mathfrak{a})$ をジェットスキームの言葉で表せ.

問題 3.10 (***). *Mather jumping numbers* をジェットスキームの言葉で表せ.

次は逆随伴定理の拡張である.

定理 3.11. X を 任意の多様体で非特異多様体 A に含まれているとする. $\mathrm{codim}(X,A)=c$ としよう. $\tilde{\mathfrak{a}}\subset\mathcal{O}_A$ をイデアル, $\mathfrak{a}:=\tilde{\mathfrak{a}}\mathcal{O}_X\neq 0$ とする. I_X を X の定義イデアル とする. このとき次の等式が成立する.

$$\widehat{\mathrm{mld}}(W;X,\mathfrak{a}\mathcal{J}ac_X)=\widehat{\mathrm{mld}}(W;A,\tilde{\mathfrak{a}}I_X^c).$$

この定理の系として、定理 2.14 が得られる. しかしこの定理の証明は 定理 2.14 をほとんど同様にたどることによって（むしろもっと易しく）証明できる. これにより次のような系が得られる.

系 3.12. X を任意の多様体すると

$$X\ni x\mapsto\widehat{\mathrm{mld}}(x;X,\mathfrak{a}\mathcal{J}ac_X)$$

は下半連続である.

系 3.13. X を任意の n 次元多様体, $x\in X$ を閉点とすると,

$$\widehat{\mathrm{mld}}(x;X,\mathcal{J}ac_X)\leq n$$

ここで等号が成立することと (X,x) が非特異であることは同値である.

これは Shokurov の予想の変形版に対する答えである.

予想 3.14 (Shokurov [12]). X を n 次元 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 多様体, $x\in X$ を閉点とする.

$$\mathrm{mld}(x;X,\mathcal{O}_X)\leq n$$

ここで等号が成立することと (X,x) が非特異であることは同値である.

X が局所的完全交叉の場合は

$$\widehat{\mathrm{mld}}(x;X,\mathcal{J}ac_X)=\mathrm{mld}(x;X,\mathcal{O}_X)$$

になるので系 3.13 は Shokurov 予想の答えを与える. 上記のように $\widehat{\mathrm{mld}}(x;X,\mathfrak{a}\mathcal{J}ac_X)$ は良い不変数であることがわかるが, 局所完全交叉でない場合は $\mathrm{mld}(x;X,\mathfrak{a})$ とこれの関係はどうなっているのだろうか?

問題 3.15 (***). 一般の $\mathbb{Q}$-*Gorenstein* では

$$\widehat{\mathrm{mld}}(x;X,\mathfrak{a}\mathcal{J}ac_X)\leq\mathrm{mld}(x;X,\mathfrak{a})$$

であるが本当に等号が成り立たない例があるのだろうか？

$\widehat{\mathrm{mld}}$ の極小モデル理論への応用として会場で出た問題も挙げておく.

問題 3.16 (***). $\widehat{\mathrm{mld}}(x; X, \mathfrak{a}\mathfrak{J}ac_X)$ の上半連続性と昇鎖条件から *flip* の有限性が導かれるか.

より具体的な問題として,

問題 3.17 (***). 一回の *flip* で $\widehat{\mathrm{mld}}$ は上昇するのか.

上記までの流れでは登場しなかった問題で最近筆者が耳にした特異点の重複度に関する問題を以下に挙げておく.

問題 3.18 (**). 特異点 (X, x) の重複度を $\mathrm{mult}_x X$, 埋め込み次元（つまり X の x での *Zariski* 接空間の次元）を $\mathrm{embdim}_x X$ と表すことにする. (X, x) が *Cohen-Macaulay* 特異点のとき

$$\mathrm{mult}_x X \geq \mathrm{embdim}_x X - \dim X + 1$$

が成立するが、これが成立するための条件をどこまで拡張できるか？

問題 3.19 (渡辺の問題: toric variety の場合には ** 一般の場合は ***). (X, x) が有理特異点ならば $\mathrm{mult}_x X \leq 2^{d-1}$. (X, x) が *log-canonical* 特異点ならば $\mathrm{mult}_x X \leq 2^d$.

References

1. C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of Log general type,* J. Amer. Math. Soc. **23**, (2010), no. 2, 405–468.
2. T. De Fernex, L. Ein and S. Ishii, *Divisorial valuations via arcs*, Publ. RIMS, **44**, (2008), 425–448, math.AG/0701867.
3. J. Denef and F. Loeser, *Germs of arcs on singular varieties and motivic integration,* Invent. Math. **135**, (1999) 201–232.
4. L. Ein, M. Mustaţă and T. Yasuda, *Jet schemes, log-discrepancies and inversion of adjunction,* Invent. Math. **153**, (2003) 519-535.
5. L. Ein and M. Mustaţă. *Inversion of Adjunction for local complete intersection varieties*, Amer. J. Math. 126 (2004), 1355–1365.
6. L. Ein and M. Mustaţă, Jet schemes and singularities, Proc. Symp. Pure Math. **80.2** (2009) 505–546.
7. L. Ein, R. Lazarsfeld and M. Mustaţă, *Contact loci in arc spaces*, Compositio Math. **140** (2004) 1229–1244.
8. S. Ishii, *Maximal divisorial sets in arc spaces*, Adv. St. in Pure Math. 50 (2008) 237–249
9. S. Ishii, *Jet schemes, arc spaces and the Nash problem*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **29** (1) (2007) 1–21.
10. M. Kawakita, *On a comparison of minimal log-discrepancy in terms of motivic integration*, mathAG/0608512.
11. S. Mori, *Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds,* J. AMS., **1** (1988) 117–253.
12. V.V. Shokurov, Problems about Fano varieties, Birational Geometry of Algebraic Varieties–Open Problems, Katata, (1988) 30–32.